Modelagem de Terreno com Triangulação CFK Adaptativa

LUIZ MARCOS GARCIA GONÇALVES[1]
ANTÔNIO ALBERTO FERNANDES DE OLIVEIRA[1]

[1]LCG - Laboratório de Computação Gráfica, COPPE - Sistemas / UFRJ
21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, Caixa Postal 68511
(lmarcos,oliveira)@lcg.ufrj.br

Abstract: This paper describes a way to reconstruct a surface given by a set of 3D points, via a CFK adaptive triangulation. This triangulation has regular rectangle isosceles triangles (two 45 degrees angles and one 90 degree). Triangles subdivisions are performed if an error calculated by a least square method is greather than a given tolerance. Triangle edge to be subdivised is the opposite edge to the 90 degree angle.

Keywords: CFK Adaptive Triangulation, Bézier Triangular Patches, Triangle Subdivision, Least Square.

1. Introdução

O objetivo deste trabalho é determinar um modelo geométrico para a reconstrução aproximada de um terreno, a partir de uma amostra de pontos. Este modelo é obtido por um processo de aproximação de uma superfície polinomial por partes, com utilização de retalhos triangulares CFK adaptativos, obedecendo a critérios estabelecidos de tolerância, em cada ponto.

Os triângulos CFK possuem uma forma regular, sendo todos retângulo-isosceles. Assim, pode-se obter informações sobre qualquer triângulo, tais como valores de funções de base (Bézier) em pontos, a partir de cálculos simples sobre informações de um triângulo mestre.

A adaptividade implica que em locais onde a superfície seja ondulada o modelo conterá mais e menores triângulos e, em regiões planas, poucos e maiores. A partir de uma triangulação CFK regular que envolva todo o conjunto de pontos, são acrescentados triângulos em locais onde critérios de refinamento exigirem uma maior precisão, a partir de subdivisões dos já existentes.

Os pontos estão irregularmente distribuídos pelos triângulos, podendo haver triângulos com mais ou menos pontos que outros. A superfície fica determinada pela obtenção de seus coeficientes de Bézier em cada retalho, o que consiste, basicamente, na resolução de um sistema de equações lineares esparso. O método é global, com características locais, dependendo de um determinado ε estipulado para tolerância. Esta tolerância nada mais é do que uma distância máxima estipulada entre cada ponto e a superfície modelada pela triangulação.

2. Escolha do Triângulo a ser Subdividido

Para cada triângulo, é aproximado, pelos mínimos quadrados, um retalho de superfície, sendo verificado o erro quadrático entre esta superfície modelada e os pontos. É tomado para subdivisão, o triângulo com maior erro, que esteja fora da tolerância estipulada.

As subdivisões são executadas, através da inserção de um novo vértice sempre no meio da maior aresta de um triângulo.

A subdivisão de um triângulo pode implicar que outros tenham que ser subdivididos. Isto se dará caso o triângulo vizinho ao que deve ser subdividido não possua em comum com este sua maior aresta, tendo o processo de subdivisão que se propagar, para manter compatível a triangulação. No caso de necessidade de propagação, as subdivisões são feitas de forma recursiva, de modo que o último triângulo a ser subdividido é o que foi escolhido inicialmente, com erro acima da tolerância. Com isto, no meio do processo, a triangulação será sempre compatível.

3. Particularidades do Modelo Geométrico

Um polinômio q de grau n, é expresso na forma de Bézier como:

$$q(P) = \sum_{i+j+k=n} c_{ijk} B^n_{ijk}(b)$$

onde $B^n_{ijk}(b)$ são polinômios da base de Bernstein, definidos por:

$$B^n_{ijk}(b) = \frac{n!}{i!j!k!} b_1^i b_2^j b_3^k, \qquad i+j+k=n$$

com $B^n_{ijk}(b) = 0$ se i ou j ou $k \notin [0,n]$.

Esta pesquisa foi parcialmente financiada pelo Projeto PROTEN-CC GEOTEC, do CNPQ e pela CAPPES

Procuramos justamente os coeficientes c_{ijk}^{n}, para cada triângulo. Introduzindo-se esta forma na equação dos mínimos quadrados, temos a equação:

$$Min\sum_{i=1}^{m}[z(p_i)-q(p_i)]^2$$

Fazendo uma pequena alteração na forma polinomial de Bernstein, substituindo na expressão de regressão polinomial acima, têm-se a equação:

$$Min\sum_{i=1}^{m}[z(p_i)-\sum_{j=1}^{p}C_j\ B_j\ (p_i)]^2$$

entendendo que os C_j = C_{ijk} são os coeficientes das equações polinomiais de cada triângulo, só definidos no triângulo a que pertence o ponto P_i. Com m coeficientes em cada um dos n triângulos, haverão $p = m$ x n coeficientes a determinar. Cada coeficiente tem o valor de sua base $B_k = B_{ijk}(p_i)$ como sendo o valor observado no ponto P_i, de acôrdo com o triângulo em que se encontre este ponto.

Assim, a equação anterior pode ser desenvolvida da seguinte forma:

$$Min\sum_{i=1}^{m}[z(p_i)-C_1B_1(p_i)-\ldots-C_PB_P(p_i)]^2$$

Derivando com relação a C_j e igualando a 0, encontramos o sistema p x p:

$$\sum z(p_i)B_1(p_i)=C_1\sum B_1(p_i)^2+...+C_p\sum B_1(p_i)B_p(p_i)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum z(p_i)B_P(p_i)=C_1\sum B_P(p_i)B_1(p_i)+...+C_p\sum B_P(p_i)^2$$

que uma vez resolvido dará os coeficientes de Bézier da superfície polinomial por partes mais próxima, de maneira global, da amostra de pontos, pelo critério dos mínimos quadrados. O sistema linear será esparso, com muitos zeros, o que facilitará sua resolução.

4. Características de Implementação da Triangulação e do Modelo

A implementação do programa e interface foi feita de forma que o modelo seja independente da triangulação, ou seja, pode-se utilizar não apenas uma superfície paramétrica de Bézier e a triangulação CFK, mas outras superfícies, implícitas ou não, e outras triangulações como a de "De Delaunay", sem necessidade de troca da base triangular, apenas alterando-se a parte relativa ao modelo.

Os objetos modelo e triangulação são independentes, havendo comunicação ou troca de mensagens entre eles apenas para solicitação de operações a serem executadas, tais como criação e subdivisão de triângulos. Assim, temos a triangulação contendo informações apenas topológicas e sem redundâncias. O objeto triângulo "sabe" quem são seus vértices e quem são seus vizinhos, ambas informações numa certa ordenação, digamos no sentido anti-horário.

5. Resultados Alcançados e Perspectivas Futuras

A finalidade principal deste trabalho foi o desenvolvimento de uma base triangular que contivesse apenas informações topológicas, sendo genérica, independente do modelo ou geometria.

A triangulação desenvolvida foi usada, com outro tipo de modelo, em dois outros trabalhos [3,4], sendo que o primeiro, de Bueno, baseia-se nos mesmos moldes deste, diferindo por usar restrições baseadas em definições de grandezas da Física para atingir a tolerância e pelo tipo do modelo polinômial de Bézier usado e o segundo, de LM e Oliveira, usa a base triangular para construir uma triangulação de Delaunay, a partir da qual encontra uma triangulação genérica, soposta ótima para modelar terrenos segundo critérios próprios de definição de terreno.

6. Referências

[1] G. FARIN. Triangular Bernstein-Bézier Patches. Computer Aided Geometric Design, V. 3, 83-127. North-Holland, 1986.

[2] D. AVIS and H. ELGINDY. Triangulating Point Sets in Space. Geometry. Springer-Verlag, New York, 1986

[3] L. P. BUENO. Minimização da Energia de Deformação na Modelagem de Terreno. Dsc Tese. COPPE-UFRJ, 1996.

[4] L. M. G. Gonçalves e A. A. F. OLIVEIRA. Algoritmos do tipo Greedy-flip para modelagem de terreno por triangulações. EQ Dsc, COPPE-UFRJ.